1. Решить систему методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

Решение:

Для исключения x_1 из второго и третьего уравнений выполним следующие преобразования: поменяем местами первую и вторую строки:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Затем прибавим ко второму уравнению системы первое, умноженное на (–3); прибавим к третьему уравнению системы первое, умноженное на (–5).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ -7x_2 - 11x_3 = -6, \\ -9x_2 - 18x_3 = -27. \end{cases}$$

Третье уравнение системы разделим на (–9) и поменяем местами со вторым:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ -7x_2 - 11x_3 = -6. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе, умноженное на 7.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_3 = 15. \end{cases}$$

Разделим третье уравнение на 3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Система сведена к треугольному виду, прямой ход метода Гаусса завершен.

Обратный ход метода Гаусса.

Подставим x_3 во второе и первое уравнения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 20 = 6, \\ x_2 + 10 = 3, \\ x_3 = 5. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -14, \\ x_2 = -7, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Подставим x_2 в первое уравнение.

$$\begin{cases} x_1 - 14 = -14, \\ x_2 = -7, \\ x_3 = 5. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -7 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Таким образом, решением системы являются $x_1 = 0, \quad x_2 = -7, \quad x_3 = 5$.

2) Рассмотрим систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

Для исключения x_1 из второго и третьего уравнений выполним следующие преобразования: поменяем местами первую и третью строки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Затем прибавим ко второму уравнению системы первое, умноженное на (–4); прибавим к третьему уравнению системы первое, умноженное на (–2).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ -3x_2 = 9, \\ -3x_2 = 9. \end{cases}$$

В полученной системе два одинаковых уравнения. Сократим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ -3x_2 = 9. \end{cases}$$

Система сведена к треугольному виду, прямой ход метода Гаусса завершен.

Обратный ход метода Гаусса.

Получили систему двух уравнений с тремя переменными. В качестве свободной переменной примем x_3. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ x_2 = -3. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + (-3) + x_3 = -3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид $(-x_3, \quad -3, \quad x_3)$.

Ответ: 1) $x_1 = 0, \quad x_2 = -7, \quad x_3 = 5$; 2) общее решение $(-x_3, \quad -3, \quad x_3)$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(1;3;4)$, $\vec{b}=(-2;5;0)$, $\vec{c}=(3;-2;-4)$, $\vec{d}=(13;-5;-4)$. Требуется:

1) доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе (используя формулы Крамера);

2) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}$, $2\vec{c}-\vec{a}$;

3) найти модуль векторного произведения $3\vec{a}$, $\vec{b}$;

4) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{d}-2\vec{a}$, $\vec{c}$.

Решение:

1) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, если они линейно независимы. Проверим выполнение этого условия с использованием смешанного произведения векторов, которое в координатной форме для векторов $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ определяется формулой

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2)$$

В данном случае,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=1\cdot5\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2)\cdot4+3\cdot0\cdot3-3\cdot5\cdot4-$$

$$-(-2)\cdot0\cdot1-(-2)\cdot3\cdot(-4)=-20+16+0-60-0-24=-88\neq0$$

Так как $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq0$, то данные векторы образуют базис.

Для разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составим векторное равенство

$$\vec{d}=d_1\vec{a}+d_2\vec{b}+d_3\vec{c}$$

или в координатной форме

$$d_1\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}+d_3\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-5\\-4\end{pmatrix}$$

Задача сведена к решению системы

$$\begin{cases} d_1-2d_2+3d_3=13 \\ 3d_1+5d_2-2d_3=-5 \\ 4d_1-4d_3=-4 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Матрица коэффициентов и матрица-столбец свободных членов данной системы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 13 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -20+0+16-60-0-24 = -88 \neq 0,$$

поэтому систему уравнений можно решить по формулам Крамера: $d_j = \dfrac{\Delta_3^{(j)}}{\Delta_3}$, $j = \overline{1,3}$, где определители $\Delta_3^{(1)}$, $\Delta_3^{(2)}$, $\Delta_3^{(3)}$ получаются из Δ_3 заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Так как

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & -2 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -260+0-16+60-0+40 = -176, \text{ то } d_1 = \frac{-176}{-88} = 2$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 20-36-104+60-8+156 = 88, \text{ то } d_2 = \frac{88}{-88} = -1$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 13 \\ 3 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -20+0+40-260-0-24 = -264, \text{ то } d_3 = \frac{-264}{-88} = 3$$

Таким образом, в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор $\vec{d}$ будет иметь координаты $\vec{d} = (2;-1;3)$.

2) Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}$, $2\vec{c}-\vec{a}$;.

Так как

$\vec{a}+\vec{b} = (1-2;3+5;4+0) = (-1;8;4)$,

$\vec{b} = (-2;5;0)$,

$2\vec{c}-\vec{a} = (6-1;-4-3;-8-4) = (5;-7;-12)$,

то

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{b},2\vec{c}-\vec{a}) = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 5 & -7 & -12 \end{vmatrix} = 60+56+0-100-0-192 = -176$$

3) Векторное произведение для векторов $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ в координатной форме определяется формулой

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Для векторов $3\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаем,

$$[3\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & 12 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

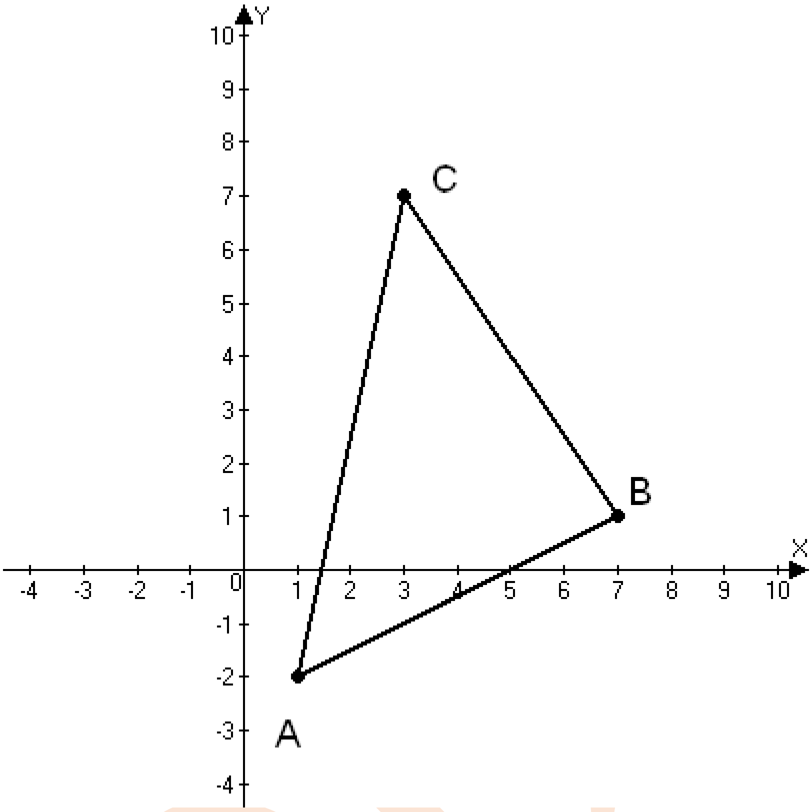
$$= (0-60)\cdot\vec{i} - (0+24)\cdot\vec{j} + (15+18)\cdot\vec{k} = -60\vec{i} - 24\vec{j} + 33\vec{k}$$

Для вектора $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ его модуль определяется формулой
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$,
поэтому
$|[\overrightarrow{3a},\vec{b}]|=\sqrt{(-60)^2+(-24)^2+33^2}=\sqrt{5265}=9\sqrt{65}$
4) Скалярное произведение для векторов $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ в координатной форме определяется формулой
$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
Так как $\vec{d}-2\vec{a}=(13-2;-5-6;-4-8)=(11;-11;-12),\vec{c}=(3;-2;-4)$ то
$(\vec{d}-2\vec{a},\vec{c})=11\cdot 3+(-11)\cdot(-2)+(-12)\cdot(-4)=33+22+48=103$
Ответ: 1) $\vec{d}=(2;-1;3)$, 2) -176, 3) $9\sqrt{65}$, 4) 103.

3. Даны вершины треугольника $A(1,-2)$, $B(7,1)$, $C(3,7)$. Сделать чертеж. Найти:

1) уравнение стороны *AB*;
2) уравнение высоты *CH*;
3) уравнение медианы *AM*;
4) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Решение:



1) Воспользуемся формулой уравнения прямой по двум точкам $M_0(x_0;y_0)$ и $M_1(x_1;y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

В данном случае получаем:

$$\frac{x-1}{7-1}=\frac{y+2}{1+2}$$

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{3}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}$$

$$(x-1)=2(y+2)$$

$x-2y-5=0$ – общее уравнение прямой AB

2) Так как высота *CH* перпендикулярна к стороне *AB*, то вектор нормали прямой *AB* $\vec{n}_{AB}=(1;-2)$ будет являться направляющим вектором прямой *CH*.

Воспользуемся формулой уравнения прямой по точке $M_0(x_0; y_0)$ и направляющему вектору $\vec{s}=(m,p)$: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}$.

В данном случае получаем:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-7}{-2}$$

$$-2(x-3)=(y-7)$$

$2x+y-13=0$ – общее уравнение высоты *CH*.

3) Медиана *AM* проходит через середину отрезка *BC*, поэтому координаты точки М определим по формулам:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}$$

Получим, $x_M=\frac{7+3}{2}=5,\quad y_M=\frac{1+7}{2}=4$. Имеем, *M*(5,4).

Воспользуемся формулой уравнения прямой по двум точкам:

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+2}{4+2}$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{6}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$$

$$3(x-1)=2(y+2)$$

$3x-2y-7=0$ – общее уравнение медианы АМ.

4) Воспользуемся формулой расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой *l*, заданной уравнением *Ax* + *By* + *C*=0

$$d(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тогда

$$d(C,AB)=\frac{|1\cdot 3-2\cdot 7-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{1+4}}=\frac{16}{\sqrt{5}}$$

Ответ: 1) $x-2y-5=0$, 2) $2x+y-13=0$, 3) $3x-2y-7=0$, 4) $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

4. Даны точки $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$. Составить уравнения:
1) плоскости $A_1A_2A_3$;
2) прямой A_1A_4;
3) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.
Решение:
1) Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

В данном случае получаем,

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-7 & z-1 \\ 2-0 & -1-7 & 5-1 \\ 1-0 & 6-7 & 3-1 \end{vmatrix}=0 .$$

$$\begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Преобразуем последнее уравнение, раскрывая определитель по элементам первой строки.

$$x\cdot\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$-12x-0\cdot(y-7)+6(z-1)=0$$

$$2x-z+1=0$$

$2x-z+1=0$ – общее уравнение плоскости, проходящей через три точки A_1, A_2, A_3.

2) Для двух точек $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ прямая, проходящая через эти точки, определяется уравнениями вида

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Для точек $A_1(0,7,1)$ и $A_4(3,-9,8)$ получим,

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-7}{-9-7}=\frac{z-1}{8-1}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y-7}{-16}=\frac{z-1}{7}$$

3) По условию, прямая A_4M перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, поэтому вектор нормали плоскости $\vec{n}_{A_1A_2A_3}=(2;0;-1)$ будет параллелен указанной прямой. Рассмотрим данный вектор в качестве направляющего вектора прямой A_4M, т.е. $\vec{s}_{A_4M}=(2;0;-1)$.

Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с направляющим вектором $\vec{s}=(m,n,p)$ имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

В данном случае:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+9}{0}=\frac{z-8}{-1}.$$

Ответ: 1) $2x-z+1=0$,

2) $\frac{x}{3}=\frac{y-7}{-16}=\frac{z-1}{7}$, 3) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+9}{0}=\frac{z-8}{-1}$.

5. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\sin 3x\cdot ctg 2x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x+5}$.

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$;

В данном случае непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Заменим исходное выражение путем разложения на множители входящих в него многочленов.

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{2x-1}{3x-4}=\frac{-4-1}{-6-4}=\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$;

В данном случае имеет место отношение бесконечно больших величин, т.е. неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, для раскрытия которой необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на старшую степень *x*.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{matrix}\textit{старшая степень}\\ k=3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{2}{0}=\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\sin 3x\cdot ctg 2x$;

В данном случае непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$.

Преобразуем пределе и заменим исходное выражение путем замены функций эквивалентными бесконечно малыми.

$$\lim_{x\to0}\sin 3x\cdot ctg 2x=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{tg 2x}=\left[\begin{matrix}tg\alpha x\sim\alpha x\\ \sin\alpha x\sim\alpha x\end{matrix}\right]=\lim_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x+5}$.

В данном случае предел основания степени равен 1, а показатель стремится к бесконечности, поэтому имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Функция преобразована таким образом, чтобы использовать второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Т.о.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x+5}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+4}{2x-3}\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{4x+5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}\frac{4}{2x-3}(4x+5)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{2x-3}(4x+5)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x+20}{2x-3}}=e^{8}.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{2}$; 2) ∞; 3) $\frac{3}{2}$; 4) e^{8}.

6. Найти производную первого порядка y' для функций:

1) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$; 2) $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$;

3) $y=\left(\sin 3x^5\right)^{\sqrt{x+9}}$; 4) $y^2=\sin 8x+y$; 5) $\begin{cases}x=2\cos^2 t\\ y=4\sin^2 t\end{cases}$.

Решение:

1) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$;

Воспользуемся формулой производной разности двух функций и таблицей основных производных.

$$y=(x-3)^{\frac{4}{3}}-3\left(2x^3-3x+1\right)^{-1}$$

$$y'=\frac{4}{3}(x-3)^{\frac{1}{3}}+3\left(2x^3-3x+1\right)^{-2}\cdot\left(6x^2-3\right)$$

$$y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x-3}+\frac{18x^2-9}{\left(2x^3-3x+1\right)}$$

2) $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$;

Воспользуемся формулой производной произведения двух функций и таблицей основных производных.

$$y'=\left(\cos^4 3x\right)'\cdot\arcsin 3x^2+\cos^4 3x\cdot\left(\arcsin 3x^2\right)'$$

$$y'=4\cos^3 3x\cdot(\cos 3x)'\cdot\arcsin 3x^2+\frac{\cos^4 3x}{\sqrt{1-9x^4}}\cdot\left(3x^2\right)'$$

$$y'=-12\cos^3 3x\cdot\sin 3x\cdot\arcsin 3x^2+\frac{6x\cos^4 3x}{\sqrt{1-9x^4}}$$

3) $y=\left(\sin 3x^5\right)^{\sqrt{x+9}}$;

Логарифмируем исходную функцию

$$\ln y=\ln\left(\sin 3x^5\right)^{\sqrt{x+9}}$$

$$\ln y=\sqrt{x+9}\cdot\ln\left(\sin 3x^5\right)$$

дифференцируем полученное равенство,

$$\sqrt{x+9}\cdot\ln\left(\sin 3x^5\right)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\ln\left(\sin 3x^5\right)}{2\sqrt{x+9}}+\frac{\sqrt{x+9}}{\sin 3x^5}\cdot\left(\sin 3x^5\right)'=\frac{\ln\left(\sin 3x^5\right)}{2\sqrt{x+9}}+\frac{15x^4\cos 3x^5\sqrt{x+9}}{\sin 3x^5}=$$

$$=\frac{\ln\left(\sin 3x^5\right)}{2\sqrt{x+9}}+15x^4 ctg 3x^5\sqrt{x+9}.$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{\ln\left(\sin 3x^5\right)}{2\sqrt{x+9}}+15x^4 ctg 3x^5\sqrt{x+9}\right)$$

$$y'=\left(\sin 3x^5\right)^{\sqrt{x+9}}\cdot\left(\frac{\ln\left(\sin 3x^5\right)}{2\sqrt{x+9}}+15x^4 ctg 3x^5\sqrt{x+9}\right)$$

4) $y^2 = \sin 8x + y$;

$$2y \cdot y' = 8\cos 8x + y'$$

$$y'(2y-1) = 8\cos 8x$$

$$y' = \frac{8\cos 8x}{2y-1}$$

5) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$.

По определению первой производной для функции, заданной параметрически, получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Находим производные:

$$\begin{cases} x'_t = 4\cos t \cdot (-\sin t) = -2\sin 2t, \\ y'_t = 8\sin t \cdot \cos t = 4\sin 2t. \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{4\sin 2t}{-2\sin 2t}$$

Окончательно получаем:

$$y'_x = \frac{4\sin 2t}{-2\sin 2t} = -2$$

Ответ: 1) $y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x-3} + \frac{18x^2-9}{(2x^3-3x+1)}$; 2) $y' = -12\cos^3 3x \cdot \sin 3x \cdot \arcsin 3x^2 + \frac{6x\cos^4 3x}{\sqrt{1-9x^4}}$;

3) $y' = (\sin 3x^5)^{\sqrt{x+9}} \cdot \left(\frac{\ln(\sin 3x^5)}{2\sqrt{x+9}} + 15x^4 ctg 3x^5 \sqrt{x+9} \right)$; 4) $y' = \frac{8\cos 8x}{2y-1}$;

5) $y'_x = -2$.

7. Для функции $y = x^3 - 3x + 1$:

1) найти экстремумы;

2) найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке [0,5;2];

3) вычислить $dy\big|_{x_0=1, \Delta x=0{,}01}$;

4) записать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(1;-1)$.

Решение:

1) Данная функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Найдем критические точки из решения уравнения $y' = 0$.

Так как

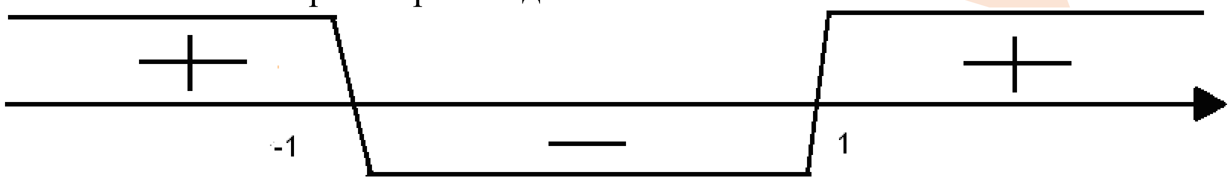
$$y' = \left(x^3 - 3x + 1\right)' = 3x^2 - 3$$

то уравнение для определения критических точек принимает вид

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

Изменение знака первой производной покажем на числовой оси.



Так как $y' > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то функция возрастает на указанных промежутках; так как $y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$, то функция убывает на указанных промежутках. При переходе через точку $x_1 = -1$ производная y' изменяет знак с «+» на «–», следовательно, в этой точке функция имеет максимум, причем $y_{\max} = y(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$; при переходе через точку $x_2 = 1$ производная y' изменяет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция имеет минимум, причем $y_{\min} = y(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

2) Критические точки функции получены выше. В решении задачи на определение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [0,5;2] будем учитывать только точку $x_2 = 1$.

$$y(1) = -1.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка: $y(0{,}5) = 0{,}125 - 1{,}5 + 1 = -0{,}375$.

$$y(2) = 8 - 6 + 1 = 3$$

Из вычисленных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$y_{наим} = y(-1) = -1$ и $y_{наиб} = y(2) = 3$.

3) Дифференциал функции $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx,$$

при заданном значении $x = x_0$ и известном значении Δx:

$$dy\big|_{x=x_0, \Delta x} = f'(x_0)\Delta x.$$

Производная функции получена выше:

$y' = 3x^2 - 3$.

Так как $y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 0$, то $dy\big|_{x_0=1, \Delta x=0,01} = 0 \cdot 0,01 = 0$.

4) Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ определяется формулой

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

В данном случае $y'(1) = 0$, $y(1) = -1$, поэтому

$$\begin{array}{l} y = 0 \cdot (x-1) - 1 \\ y = -1 \end{array}.$$

Нормаль является прямой, которая перпендикулярна касательной.

Для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых справедливо равенство: $k_1 \cdot k_2 = -1$, откуда $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Так как для касательной $k_1 = 0$, то для нормали $k_2 = -\dfrac{1}{0} = -\infty$. Получим, уравнение нормали:

$$\begin{array}{l} y = -\infty \cdot (x-1) - 1 \\ x = 1 \end{array}$$

Ответ: 1) $y_{\max} = 3$, $y_{\min} = -1$; 2) $y_{наим} = y(-1) = -1$ и $y_{наиб} = y(2) = 3$;

3) $dy\big|_{x_0=1, \Delta x=0,01} = 0$; 4) $y = -1; x = 1$.