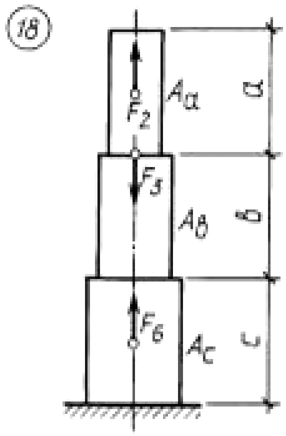
Задача 1

Ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F. Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости E = 200 ГПа.

Требуется: построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.



a = 24 см
b = 80 см
c = 60 см
$A_a = 4$ см^2
$A_b = 6$ см^2
$A_c = 10$ см^2
$F_1 = 80$ кН
$F_2 = 140$ кН
$F_3 = 100$ кН
$F_4 = 120$ кН
$F_5 = 40$ кН
$F_6 = 80$ кН

Решение:

Для определения внутренних усилий разбиваем стержень на участки. Границами участков являются точки продольной оси, соответствующие изменению площади поперечного сечения и местами приложения сосредоточенных сил. Определяем, что стержень необходимо разбить на пять участков.

Проведем сечение I-I. Отбросим нижнюю часть стержня и ее действие заменим нормальной силой N_1. Запишем уравнение равновесия, проецируя все силы на ось стержня:

$$\sum Z = F_1 - N_1 = 0, \text{откуда}$$
$$N_1 = F_1 = 0 \text{ кН}.$$

На участке 1-2 нормальная сила N_1 постоянна по величине.

Проведем сечение II-II и, отбрасывая нижнюю часть стержня, заменяем ее действие нормальной силой N_2. Проецируем все силы на ось стержня:

$$\sum Z = F_2 - N_2 = 0, \text{откуда}$$
$$N_2 = F_2 = 140 \text{ кН}.$$

Аналогично находим нормальные силы в сечении III-III:

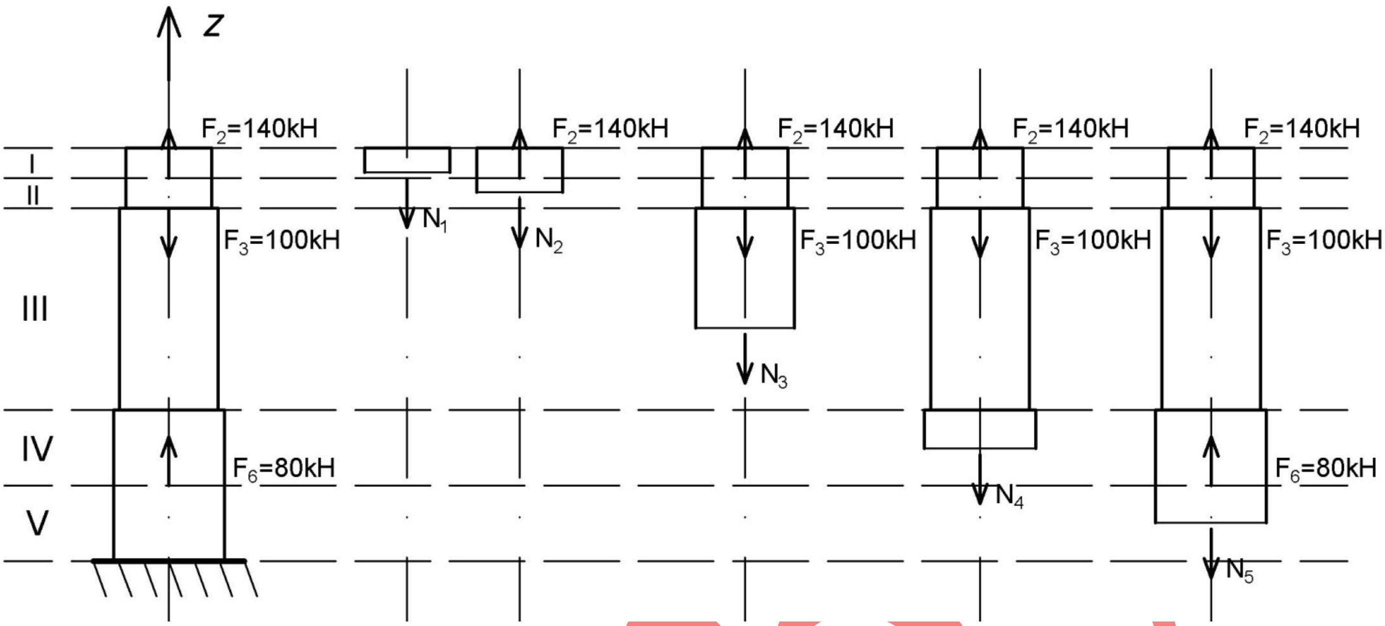
$$\sum Z = F_2 - F_3 - N_3 = 0, \text{откуда}$$
$$N_3 = F_2 - F_3 = 140 - 100 = 40 \text{ кН}.$$

Аналогично находим нормальные силы в сечении IV-IV:

$$\sum Z = F_2 - F_3 - N_4 = 0, \text{откуда}$$
$$N_4 = F_2 - F_3 = 140 - 100 = 40 \text{ кН}.$$

Аналогично находим нормальные силы в сечении V-V:

$$\sum Z = F_2 - F_3 + F_6 - N_5 = 0, \text{откуда}$$
$$N_5 = F_2 - F_3 + F_6 = 140 - 100 + 80 = 120 \text{ кН}.$$



Откладывая в масштабе значение нормальных сил N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 в пределах соответствующих участков, получаем эпюру нормальных сил. Знак «плюс» показывает, что в пределах данного участка – растяжение, а «минус» - сжатие. Для построения эпюры нормальных напряжений, воспользуемся формулой: $\sigma = \frac{N}{A}$.

Определим напряжение для каждого участка:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_a} = \frac{0 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_a} = \frac{140 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 350 \cdot 10^6 \text{ Па} = 350 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_b} = \frac{40 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 66{,}67 \cdot 10^6 \text{ Па} = 66{,}67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_c} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{A_c} = \frac{120 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 120 \cdot 10^6 \text{ Па} = 166{,}67 \text{ МПа}.$$

В масштабе откладываем значение напряжений и определяем, что максимальное значение напряжения достигает на участке II.

Для построения эпюры перемещений воспользуемся формулой:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{\sigma \cdot l}{E}.$$

Расчет начинаем с участка V, так как перемещение в заделке отсутствует. Определим изменение длин каждого из участков:

$$\Delta l_5 = \frac{\sigma_5 \cdot l_5}{E} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}6}{2}}{200 \cdot 10^9} = 0{,}18 \cdot 10^{-3} \text{м} = 0{,}18 \text{ мм};$$

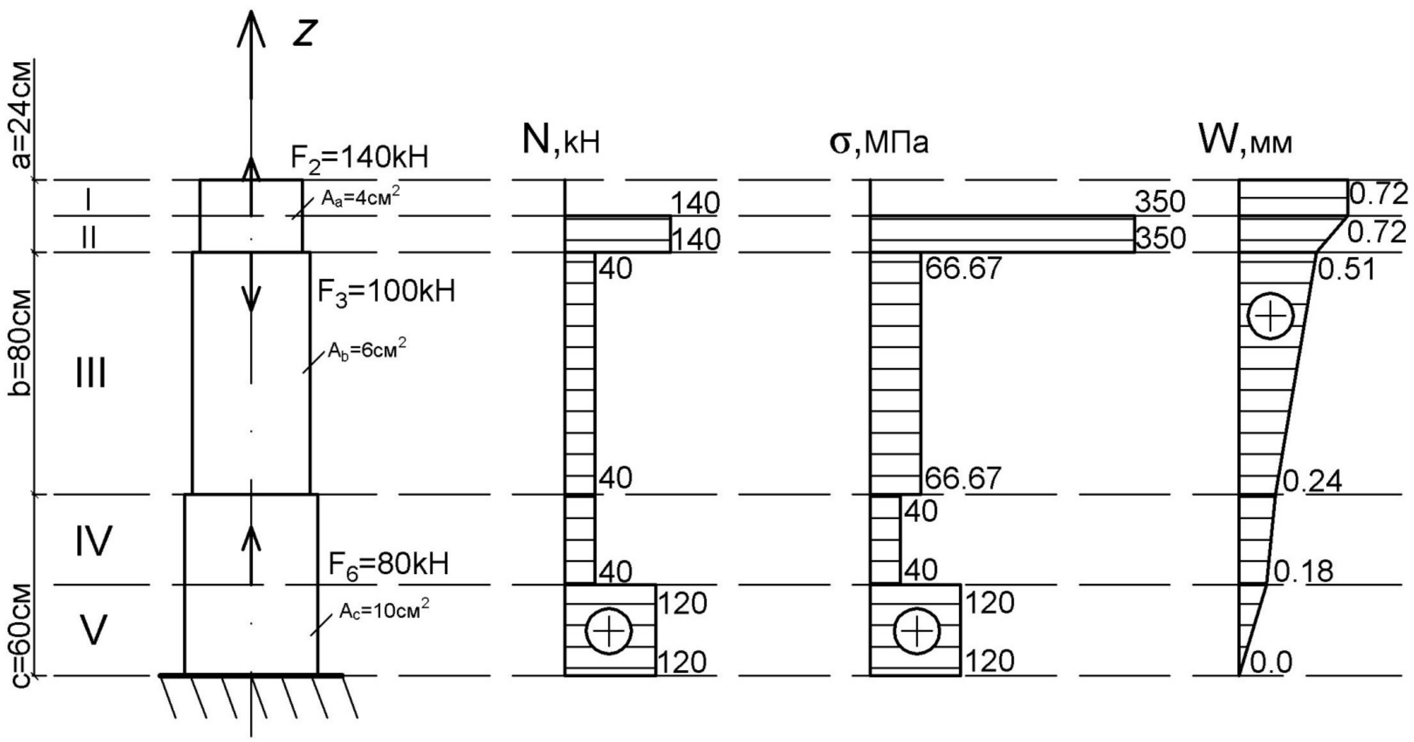
$$\Delta l_4 = \frac{\sigma_4 \cdot l_4}{E} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,6}{2}}{200 \cdot 10^9} = 0,06 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0,06 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 \cdot l_3}{E} = \frac{66,67 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{200 \cdot 10^9} = 0,27 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0,27 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = \frac{350 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,24}{2}}{200 \cdot 10^9} = 0,21 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0,21 \text{ мм};$$

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 \cdot l_1}{E} = \frac{0 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,24}{2}}{200 \cdot 10^9} = 0 \cdot 10^{-3}\text{м} = 0 \text{ мм}.$$

Перемещение участка V: $W_5 = \Delta l_5 = 0{,}18$ мм.
Перемещение участка IV: $W_4 = W_5 + \Delta l_4 = 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}24$ мм.
Перемещение участка III: $W_3 = W_4 + \Delta l_3 = 0{,}24 + 0{,}27 = 0{,}51$ мм.
Перемещение участка II: $W_2 = W_3 + \Delta l_2 = 0{,}51 + 0{,}21 = 0{,}72$ мм.
Перемещение участка I: $W_1 = W_2 + \Delta l_1 = 0{,}72 + 0 = 0{,}72$ мм.
В масштабе откладываем значение перемещений.



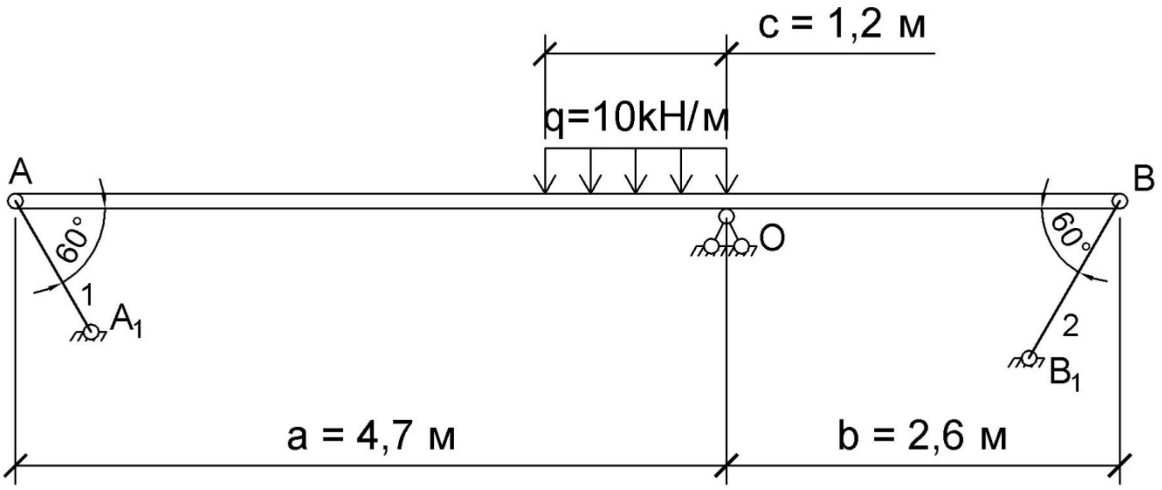
Задача 3

Система, состоящая из элементов большой жесткости и двух стальных стержней, загружена расчетной нагрузкой. Расчетное сопротивление материала стержней R = 210 МПа.

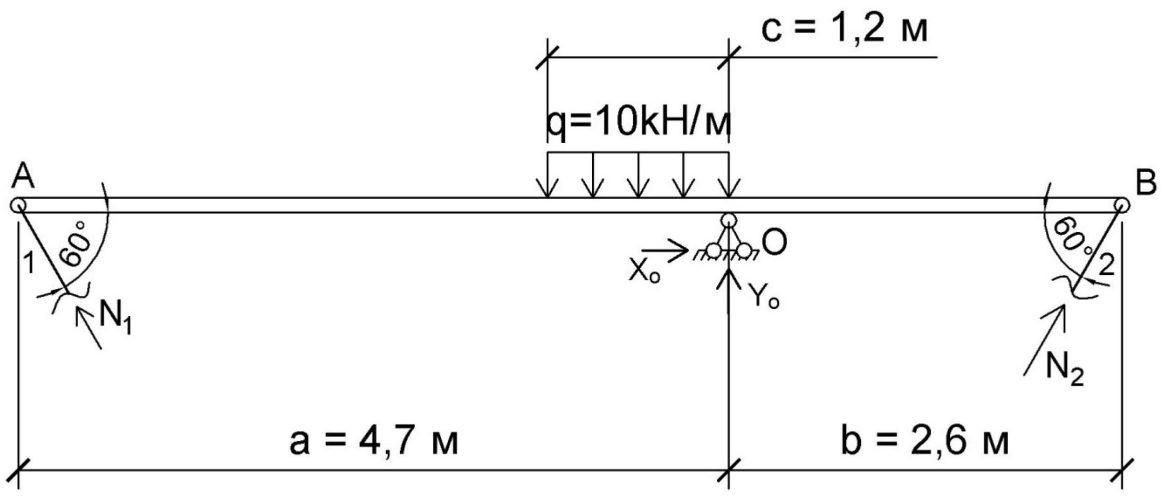
Требуется: проверить прочность стержней.

q=10 кН/м a=4,7 м b=2,6 м c=1,2 м l_1=1,0 м l_2=1,2 м

A_1=7 см^2 A_2=8 см^2



Составим расчётную схему стержневой системы:



В схеме N_1 и N_2 – нормальные силы, возникающие в стержнях AA_1 и BB_1, Y_o и X_o – вертикальная и горизонтальная составляющая опорной реакции шарнирно-неподвижной опоры О. Таким образом, имеем 4 неизвестные реакции (N_1, N_2, Y_o, X_o) и три уравнения равновесия ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_o = 0$). Следовательно, данная система является один раз статически неопределимой и для её решения требуется составить дополнительное уравнение перемещений.

Запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_o = N_1 \sin 60° \cdot a - q \cdot \frac{c^2}{2} - N_2 \sin 60° \cdot b = 0;$$

$$N_1 \cdot 0{,}866 \cdot 4{,}7 - 10 \cdot \frac{1{,}2^2}{2} - N_2 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}6 = 0;$$

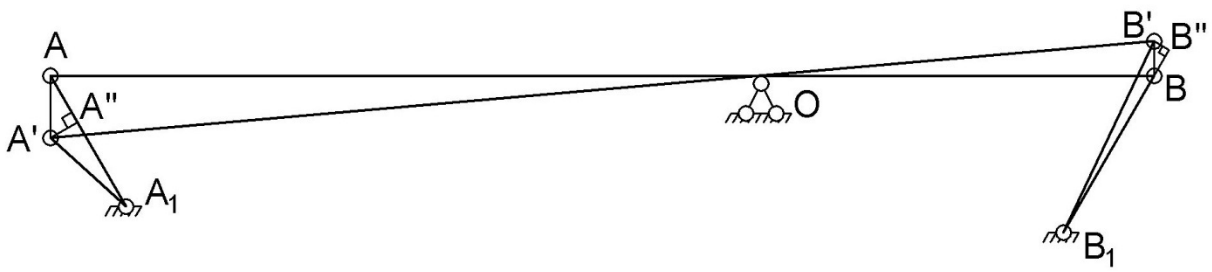
$$4{,}070 \cdot N_1 - 7{,}2 - 2{,}252 \cdot N_2 = 0;$$

$$N_2 = 1{,}807 \cdot N_1 - 3{,}197.$$

Данное уравнение имеет 2 неизвестные нормальные силы.

Для составления дополнительного уравнения перемещений рассмотрим деформацию системы, предположив, что абсолютно жёсткий элемент АОВ при деформации повернётся вокруг опоры О, оставаясь жёстким.

Составим схему перемещений:



Из подобия треугольников АОА’ и ВОВ’ имеем:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$$

По закону Гука и из-за малости угла поворота:

$$AA' = \frac{AA''}{\sin 60°} = \frac{\Delta l_1}{\sin 60°} = \frac{N_1 l_1}{EA_1 \cdot \sin 60°}$$

$$BB' = \frac{BB''}{\sin 60°} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60°} = \frac{N_2 l_2}{EA_2 \cdot \sin 60°}$$

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1 \cdot \sin 60°} \cdot \frac{EA_2 \cdot \sin 60°}{N_2 l_2} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{N_1 \cdot 1{,}0}{7 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{N_2 \cdot 1{,}2} = \frac{4{,}7}{2{,}6};$$

$$0{,}952 \cdot \frac{N_1}{N_2} = 1{,}808;$$

$$N_1 = 1{,}899 N_2.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} N_2 = 1{,}807 \cdot N_1 - 3{,}197 \\ N_1 = 1{,}899 N_2 \end{cases}$$

$$-N_2 + 1{,}807 \cdot 1{,}899 \cdot N_2 = 3{,}197$$

$$2{,}431 \cdot N_2 = 3{,}197$$

$$N_2 = 1{,}315 \text{ кН}$$

$$N_1 = 1{,}899 \cdot N_2 = 1{,}899 \cdot 1{,}315 = 2{,}497 \text{ кН}.$$

Определим напряжение в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2{,}497 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^{-4}} = 3{,}567 \text{ МПа } < 210 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1{,}315 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 1{,}644 \text{ МПа } < 210 \text{ МПа}$$

Прочность стержней обеспечена.

Определим опорные реакции в точке O:

$$\sum Y = 0; \quad Y_o + N_1 \cdot \sin 60° + N_2 \cdot \sin 60° - q \cdot c = 0$$

$$Y_o = -2{,}497 \cdot 0{,}866 - 1{,}315 \cdot 0{,}866 + 10 \cdot 1{,}2 = 8{,}699 \text{ кН}$$

$$\sum X = 0; \quad X_o - N_1 \cdot \cos 60° + N_2 \cdot \cos 60° = 0$$

$$X_o = 2{,}497 \cdot 0{,}5 - 1{,}315 \cdot 0{,}5 = 0{,}591 \text{ кН}$$

Ответ: прочность стержней обеспечена.

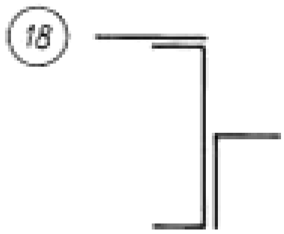
Задача 4

Для заданного сечения, состоящего из прямоугольников и прокатных профилей.

Требуется:

1) вычислить главные центральные моменты инерции;
2) вычертить сечение и показать все оси и размеры.

Схема сечения



Лист hxb=20x1,8 см

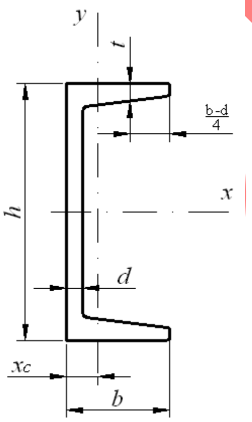
Швеллер 20

Равнобокий уголок 100x100x8 мм

РЕШЕНИЕ

Предварительно рассчитаем и выпишем из сортамента геометрические характеристики профилей, составляющих сечение.

Геометрические характеристики швеллера 20 (фигура 1)



$A_1=23,4$ см^2

h=200 мм

b=76 мм

d=5,2 мм

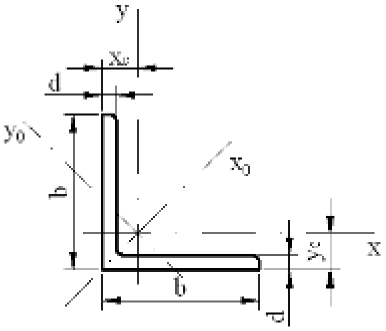
t=9,0 мм

$I_x=1520$ см^4

$I_y=113$ см^4

$x_c=2,07$ см

Геометрические характеристики равнобокого уголка 100x100x8 (фигура 2)



A_2=15,6 см^2
I_{x2}= 147,1 см^4
I_{y2}=147,1 см^4
x_c=y_c=2,75 см
I_{xy2}=86,3 см^4

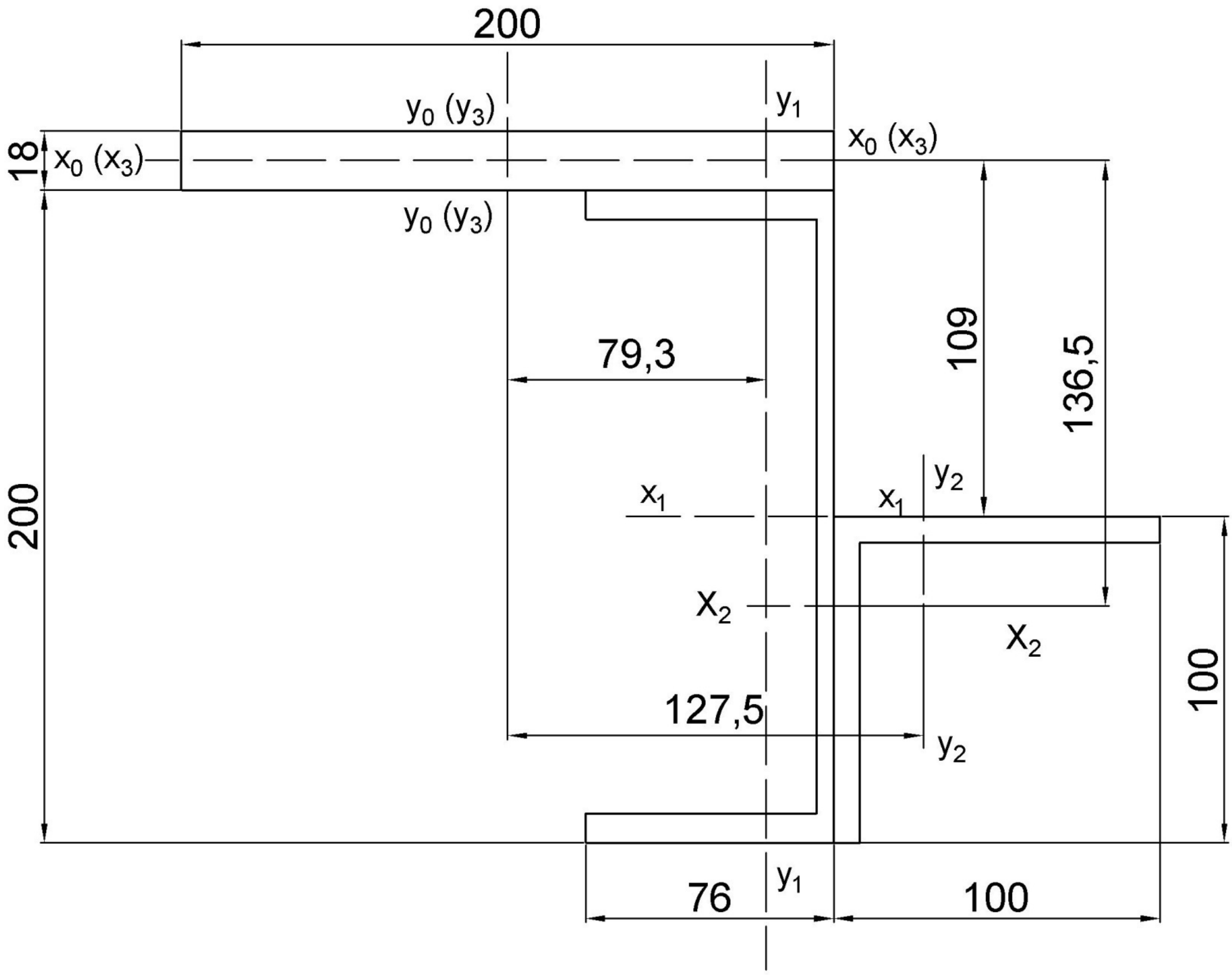
Геометрические характеристики листа (фигура 3):

$$A_3 = h \cdot b = 20 \cdot 1{,}8 = 36{,}0 \text{ см}^2$$

$$I_{x3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 1{,}8^3}{12} = 9{,}72 \text{ см}^4$$

$$I_{y3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1{,}8 \cdot 20^3}{12} = 1200 \text{ см}^4$$

Определим положение центра тяжести сечения, предварительно выбрав вспомогательные оси x_o и y_o. Проведем эти оси через центр тяжести листа и рассчитаем расстояние между осями x_o и y_o и центральными осями каждого из элементов сечения.



$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A_i} = \frac{-23{,}4 \cdot 10{,}9 - 15{,}6 \cdot 13{,}65 + 36{,}0 \cdot 0}{23{,}4 + 15{,}6 + 36} = -6{,}24 \text{ см},$$
$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A_i} = \frac{23{,}4 \cdot 7{,}93 + 15{,}6 \cdot 12{,}75 + 36{,}0 \cdot 0}{23{,}4 + 15{,}6 + 36} \approx 5{,}13 \text{ см}.$$

Через центр тяжести фигуры проводим центральные оси x_c и y_c.

Рассчитаем расстояния между осями x_c и y_c и центральными осями каждого из элементов сечения. Расстояния между осями x_i:

$$a_1 = -10{,}9 + 6{,}24 = -4{,}66 \text{ см}; \;\; a_2 = -13{,}65 + 6{,}24 = -7{,}41 \text{ см};$$
$$a_3 = -0{,}6{,}24 \text{ см}.$$

Расстояния между осями y_i:

$$b_1 = 7{,}93 - 5{,}13 = 2{,}8 \text{ см}; \;\; b_2 = 12{,}75 - 5{,}13 = 7{,}62 \text{ см}; \;\; b_3 = 5{,}13 \text{ см}.$$

Определим осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей:

$$I_{x_c} = I_{x_1} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{x_2} + A_2 \cdot a_2^2 + I_{x_3} + A_3 \cdot a_3^2 = 1520 + 23{,}4 \cdot (-4{,}66)^2 +$$
$$+147{,}1 + 15{,}6 \cdot (-7{,}41)^2 + 9{,}72 + 36{,}0 \cdot (-6{,}24)^2 = 4443{,}285 \text{ см}^4,$$
$$I_{y_c} = I_{y_1} + A_1 \cdot b_1^2 + I_{y_2} + A_2 \cdot b_2^2 + I_{y_3} + A_3 \cdot b_3^2 = 113 + 23{,}4 \cdot 2{,}8^2 +$$
$$+147{,}1 + 15{,}6 \cdot 7{,}62^2 + 1200 + 36{,}0 \cdot 5{,}13^2 = 3496{,}769 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции всего сечения:

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot a_1 b_1 + I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot a_2 b_2 + I_{x_3 y_3} + A_3 \cdot a_3 b_3 =$$
$$= 0 + 23{,}4 \cdot (-4{,}66) \cdot 2{,}8 + 86{,}3 + 15{,}6 \cdot (-7{,}41) \cdot 7{,}62 + 0 +$$
$$+36{,}0 \cdot (-6{,}24) \cdot 5{,}13 = -2252{,}268 \text{ см}^4.$$

$I_{x_1 y_1} = 0$; $I_{x_3 y_3} = 0$, т.к. фигуры имеют оси симметрии.

Определим положение главных центральных осей сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-2252{,}268)}{4443{,}285 - 3496{,}769} = 4{,}759$$
$$2\alpha = 78{,}13°; \quad \alpha \approx 39{,}07°$$

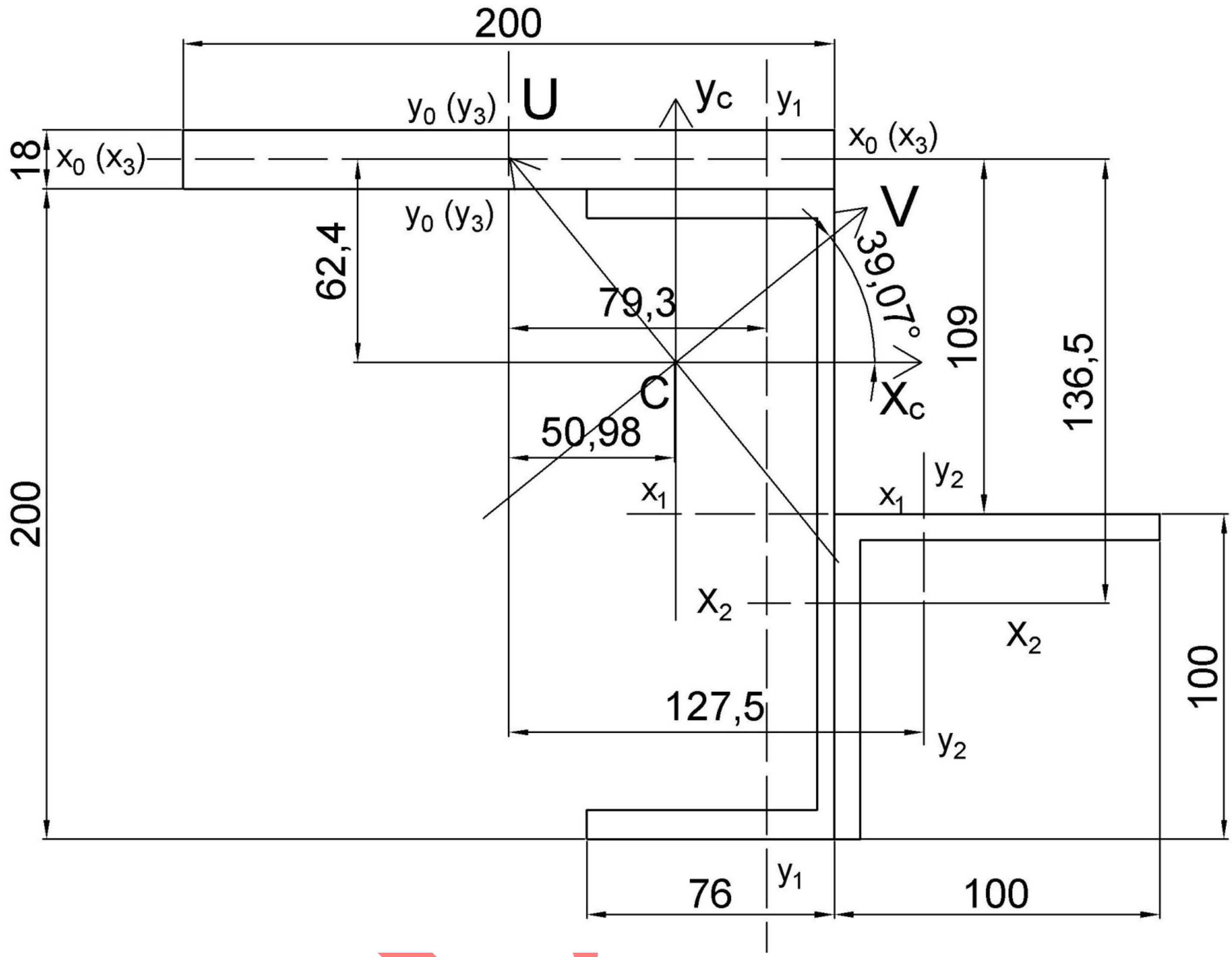
Угол α откладывает от оси x_c против хода часовой стрелки так как $I_{x_c} > I_{y_c}$ и перед значением угла стоит знак «+».

Определим значение главной центральных осей составного сечения:

$$I_{\frac{max}{min}} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(I_{x_c} - I_{y_c}\right)^2 + 4I_{x_c y_c}^2} =$$
$$= \frac{4443{,}285 + 3496{,}769}{2} \pm \sqrt{(4443{,}285 - 3496{,}769)^2 + 4 \cdot (-2252{,}268)^2} =$$
$$= 3970{,}027 \pm 4602{,}905$$
$$I_{max} = 3970{,}027 + 4602{,}905 = 8572{,}932 \text{ см}^4$$
$$I_{min} = 3970{,}027 - 4602{,}905 = -632{,}878 \text{ см}^4$$

Проверим правильность вычисления: $I_{x_c} + I_{y_c} = I_{max} + I_{min}$,

$$4443{,}285 + 3496{,}769 = 8572{,}932 - 632{,}878 = 7940{,}054$$


200
U
y_0 (y_3)
y_C
y_1
18
x_0 (x_3)
x_0 (x_3)
y_0 (y_3)
V
62,4
39,07°
79,3
109
136,5
C
X_C
50,98
x_1
y_2
x_1
200
X_2
X_2
100
127,5
y_2
y_1
76
100