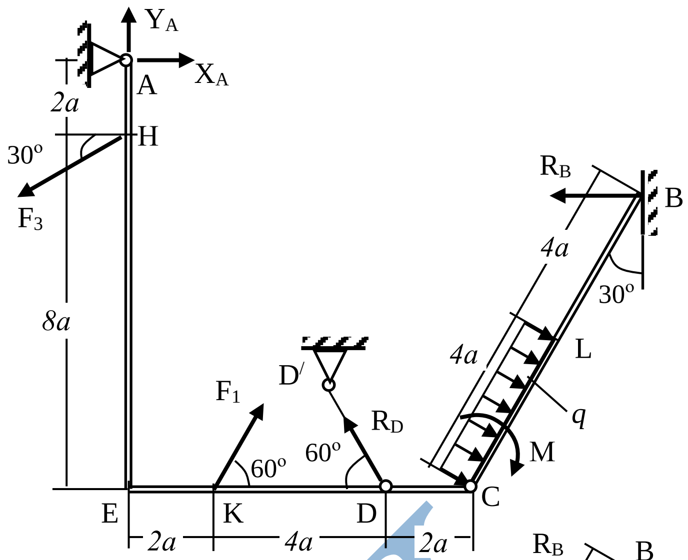
ЗАДАНИЕ С2-00



Дано: M=60 кНм, q=20 кН/м, a=0,2 м, F_1=10 кН, F_3=30 кН.

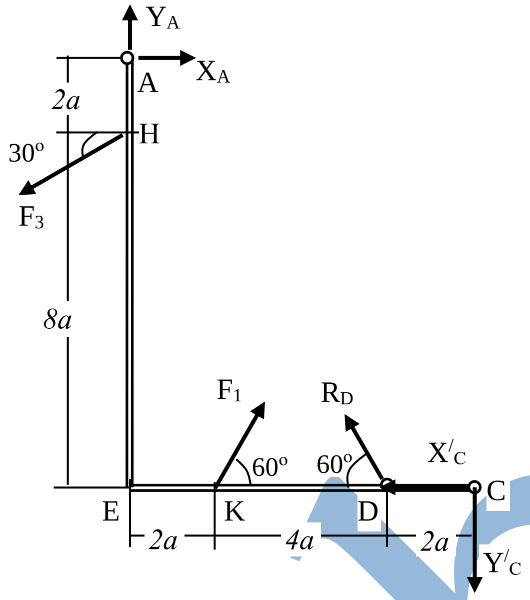
Найти: Найти реакции связей в т. А, В,С.

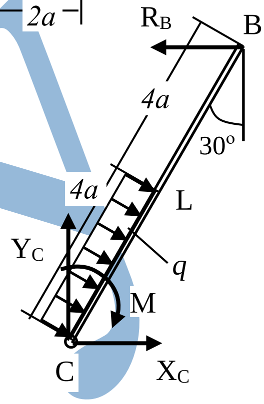
РЕШЕНИЕ:

Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим вначале равновесие стержня ВС.

На стержень действуют равномерно распределенной в середине участка LC ($Q = q \cdot 4a$=16 кН), пара сил с моментом M, реакция опорной поверхности R_B и составляющие X_C, Y_C реакции шарнира С.

Для полученной плоской системы сил составляем уравнения равновесия:





$$\Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-M - Q \cdot 2a + R_B \cdot 8a\cos 30^\circ = 0,$$

$$R_B = \frac{M + 2aQ}{8a\cos 30^\circ} = \frac{60 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 16}{8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866}$$

$= =$**47,9**(кН);

$$\Sigma \vec{F}_{kx} = 0;$$

$$X_C + Q\cos 30^\circ - R_B = 0,$$

$X_C = -Q\cos 30^\circ + R_B = -16 \cdot 0{,}866 + 47{,}9 =$ **29,4** (кН);

$\Sigma \vec{F}_{ky} = 0;$ $Y_C - Q\sin 30^\circ = 0,$ $Y_C = Q\sin 30^\circ = 16 \cdot 0{,}5 =$ **8** (кН).

Теперь рассмотрим равновесие угольника АЕС. На него действует силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$, составляющие реакции шарнира С X'_C, Y'_C (направлены противоположно X_C, Y_C и численно $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$) и реакция шарнира А ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$).

Для этой плоской системы сил тоже составим уравнения равновесия: $\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0;$

$$-F_3\cos 30^\circ \cdot 2a + F_1\cos 60^\circ \cdot 10a + F_1\sin 60^\circ \cdot 2a - Y'_C \cdot 8a - X'_C \cdot 10a - R_D\cos 60 \cdot 10a + R_D\sin 60 \cdot 6a = 0$$

$$R_D = \frac{-2F_3\cos 30^\circ + F_1(10\cos 60^\circ + 2\sin 60^\circ) - Y'_C \cdot 8 - X'_C \cdot 10}{10\cos 60 - 6\sin 60} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 30 \cdot 0{,}866 + 10(10 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}866) - 8 \cdot 8 - 29{,}4 \cdot 10}{10 \cdot 0{,}5 - 6 \cdot 0{,}866} = \textbf{1748}(\text{кН}).$$

$$\Sigma \vec{F}_{kx} = 0;\ X_A - X'_C + F_1\cos 60^\circ - F_3\cos 30^\circ - R_D\cos 60^\circ = 0,$$

$X_A = X'_C - F_1\cos 60^\circ + F_3\cos 30^\circ + R_D\cos 60^\circ = 29{,}4 - 10 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 0{,}866 + 1748 \cdot 0{,}5 =$ **924,4**(кН);

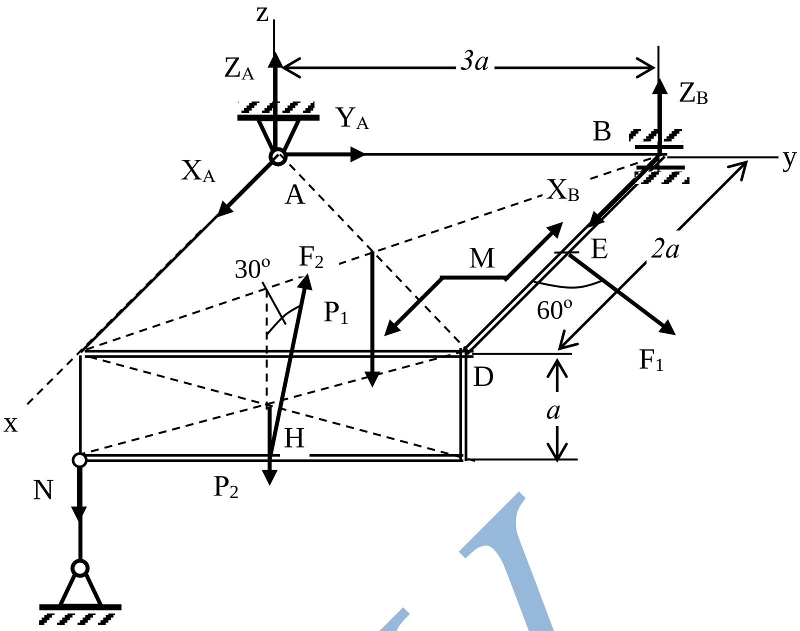
$$\Sigma \vec{F}_{ky} = 0;\ Y_A - Y'_C + F_1\sin 60^\circ - F_3\sin 30^\circ + R_D\sin 60^\circ = 0,$$

$Y_A = Y'_C - F_1\sin 60^\circ + F_3\sin 30^\circ - R_D\sin 60^\circ = 8 - 10 \cdot 0{,}866 + 30 \cdot 0{,}5 - 1748 \cdot 0{,}866 =$ **–1499,4**(кН)

– действительное направление составляющей противоположно принятому на рисунке;

R_D	X_A	Y_A	R_B	X_C	Y_C
кН					
1748	924,4	–1499,4	47,9	29,4	8

ЗАДАНИЕ С4–00



<u>Дано</u>: P_1=5 кН, P_2=3 кН, M=4 кНм, a=0,6 м, F_1=6 кН, F_2=8 кН.

<u>Найти</u>: реакции связей А, В и стержня.

РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим равновесие угольника. На него действуют силы тяжести P_1, P_2, силы F_1, F_2, пара сил с моментом М и реакции связей А (X_A, Y_A, Z_A) и В (X_B, Z_B) и стержня N (считаем его растянутым).

Составляем уравнения равновесия пространственной системы сил:

$\Sigma m_x(\vec{F}_k) = 0$;

$$Z_B \cdot 3a - (P_1 + P_2) \cdot 1{,}5a + F_2 \cos 30^\circ \cdot 1{,}5a = 0$$

$Z_B = 0{,}5(P_1 + P_2 - F_2 \cos 30^\circ) = 0{,}5(5 + 3 - 8 \cdot 0{,}866) =$ **0,54** (кН);

$\Sigma m_y(\vec{F}_k) = 0$; $\quad N \cdot 2a + P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a + F_2 \sin 30^\circ \cdot a - F_2 \cos 30^\circ \cdot 2a = 0$,

$N = F_2 \cos 30^\circ - (\dfrac{P_1}{2} + P_2 + \dfrac{F_2}{2} \sin 30^\circ) = 8 \cdot 0{,}866 - (2{,}5 + 3 + 4 \cdot 0{,}5) =$ –**0,57** (кН) – действительное направление противоположно принятому на рисунке;

$\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0$; $\quad M + F_2 \sin 30^\circ \cdot 1{,}5a + F_1 \sin 60^\circ \cdot a - F_1 \cos 60^\circ \cdot 3a - X_B \cdot 3a = 0$

$X_B = \dfrac{M}{3a} + \dfrac{F_2}{2} \sin 30^\circ + \dfrac{F_1}{3} \sin 60^\circ - F_1 \cos 60^\circ = \dfrac{4}{3 \cdot 0{,}6} + \dfrac{8}{2} \cdot 0{,}5 + \dfrac{6}{3} 0{,}866 - 6 \cdot 0{,}5 =$ –**2,95** (кН) – действительное направление противоположно принятому на рисунке;

$\Sigma \vec{F}_{kx} = 0$; $\quad X_A + X_B - F_2 \sin 30^\circ + F_1 \cos 60^\circ = 0$, $\quad X_A = -X_B + F_2 \sin 30^\circ - F_1 \cos 60^\circ =$ $= 2{,}95 + (8 - 6)0{,}5 =$ **3,95** (кН);

$\Sigma \vec{F}_{ky} = 0$; $\quad Y_A + F_1 \sin 60^\circ = 0$,

$Y_A = -F_1 \sin 60^\circ = -6 \cdot 0{,}866 =$ –**5,2** (кН);

$\Sigma \vec{F}_{kz} = 0$; $\quad Z_A + Z_B - P_1 - P_2 + F_2 \cos 30^\circ - N = 0$,

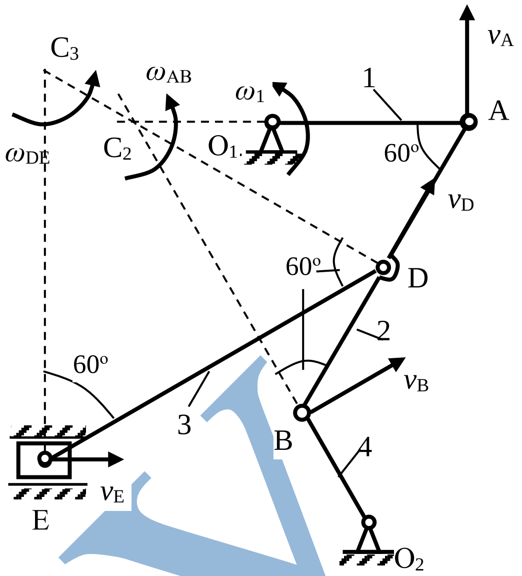
$Z_A = P_1 + P_2 - F_2 \cos 30^\circ + N - Z_B = 5 + 3 - 8 \cdot 0{,}866 - 0{,}57 - 0{,}54 =$ –**0,04** (кН).

X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B	N
кН					
3,95	–5,2	–0,04	–2,95	0,54	–0,57

ЗАДАНИЕ К3-00

Дано: $\alpha=0°$, $\beta=60°$, $\gamma=30°$, $\varphi=0°$, $\theta=120°$, ω_1=6 1/с, АД=ВД, $\ell_1=0{,}4$ м, $\ell_2=1{,}2$ м, $\ell_3=1{,}4$ м, $\ell_4=0{,}6$ м.

Найти: скорости v_B, v_E, ω_{DE}, ускорения a_B и ε_{AB}



РЕШЕНИЕ:

Скорость т.А $v_A=\omega_1\ell_1=6\cdot 0{,}4$=2,4 (м/с), $v_A\perp$. O₁A в сторону вращения.

Определение v_B**.** Зная направления v_A и v_B (перпендикулярно кривошипам O₁A и O₂B) найдем положение МЦС звена АВ (т.C₂). Тогда

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{C_2A}=\frac{v_B}{C_2B}=\frac{v_D}{C_2D} \qquad (1)$$

и отсюда $v_B=v_A\dfrac{C_2B}{C_2A}$. Определим C₂A и C₂B. Из построения МЦС следует, что ΔABC_2 – равносторонний (все углы равны 60º). Т.е. $C_2B=C_2A=AB=\ell_2$. Следовательно

$$v_B=v_A=2{,}4 \text{ (м/с)}.$$

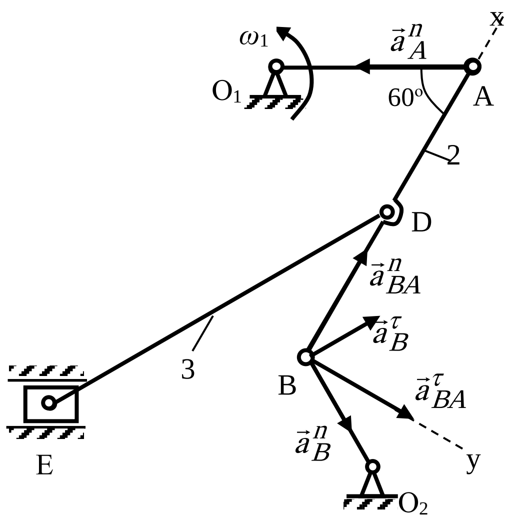
Определение v_E**.** Найдем сначала скорость т.Д из соотношения (1): $v_D=v_A\dfrac{C_2D}{C_2A}$. Из рисунка следует, что $C_2D=\ell_2\cdot\cos 30°$. Отсюда $v_D=v_A\cos 30°=2{,}4\cdot 0{,}866=$ 2,08 (м/с). Вектор скорости v_D направлен в соответствии с угловой скоростью вращения звена АВ (здесь вдоль ВА). Точки Д и Е принадлежат одному звену ДЕ. Воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющие эти точки (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки и быть равными), согласно которой

$$v_E\cos 30°=v_D\cos 30°, \text{ т.е. } v_E=v_D=2{,}08 \text{ (м/с)}.$$

Определение ω_{DE}**.** Для определения ω_{DE} найдем положение МЦС звена ДЕ (т.C₃). Тогда $\omega_{DE}=\dfrac{v_D}{C_3D}=\dfrac{v_E}{C_3E}$. ΔДЕC₃ – равносторонний. Тогда $C_3E=C_3D=DE=\ell_3$ и

$$\omega_{DE}=\frac{v_E}{\ell_3}=\frac{2{,}08}{1{,}4}=1{,}48 \text{ (1/c)}.$$

Определение a_B **и** ε_{AB}**.** Точка В принадлежит звену АВ. Чтобы найти a_B найдем сначала ускорение т. А: $\vec a_A=\vec a_A^\tau+\vec a_A^n$. $a_A^\tau=0$ (равномерное вращение) и $a_A=a_A^n=\omega_1^2\ell_1=6^2\cdot 0{,}4$=14,4 (м/с²).



Так как т.В движется по окружности, то $\vec a_B=\vec a_B^\tau+\vec a_B^n$ и

$$\vec a_B^\tau+\vec a_B^n=\vec a_A^n+\vec a_{BA}^\tau+\vec a_{BA}^n \qquad (2)$$

Направления векторов: $\vec a_B^\tau\perp$BO₂ (пока произвольно), $\vec a_B^n$ – вдоль BO₂ от В к O₂ (численно $a_B^n=\dfrac{v_B^2}{\ell_4}=\dfrac{2{,}4^2}{0{,}6}$=9,6 м/с²), $\vec a_A^n$ – вдоль AO₁ от А к O₁, $\vec a_{BA}^\tau\perp$ВА (пока произвольно), $\vec a_{BA}^n$ – вдоль ВА от В к А (численно $a_{BA}^n=\omega_{AB}^2\cdot\ell_2$). Из соотношения (1) $\omega_{AB}=\dfrac{v_A}{C_2A}=\dfrac{v_A}{\ell_2}=\dfrac{2{,}4}{1{,}2}=$ 2 (1/с) и

$a_{BA}^n = 2^2 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$ (м/с^2). Для определения $\vec{a}_B^\tau$ и $\vec{a}_{BA}^\tau$ спроектируем обе части равенства на оси координат: ось x – вдоль BA, $y \perp$ BA.

ось x: $\quad a_B^\tau \cos 30^\circ - a_B^n \cos 60^\circ = a_{BA}^n - a_A^n \cos 60^\circ$

ось y: $\quad a_B^\tau \sin 30^\circ + a_B^n \sin 60^\circ = a_{BA}^\tau - a_A^n \sin 60^\circ$

Из первого уравнения найдем $\vec{a}_B^\tau$:

$$a_B^\tau = \frac{a_{BA}^n - a_A^n \cos 60^\circ + a_B^n \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{4{,}8 - (14{,}4 - 9{,}6) \cdot 0{,}5}{0{,}866} = 2{,}77 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тогда ускорение т.В равно

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^\tau\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2} = \sqrt{2{,}77^2 + 9{,}6^2} = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Из второго уравнения найдем $\vec{a}_{BA}^\tau$:

$$a_{BA}^\tau = (a_B^n + a_A^n) \sin 60^\circ + a_B^\tau \sin 30^\circ = (9{,}6 + 14{,}4) \cdot 0{,}866 + 2{,}77 \cdot 0{,}5 = 22{,}2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

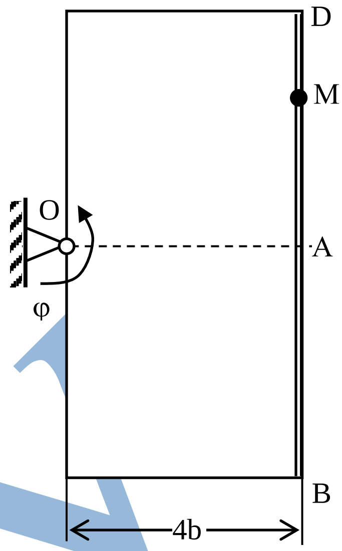
Из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot \ell_2$ получим

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{\ell_2} = \frac{22{,}2}{1{,}2} = 18{,}5 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

ЗАДАНИЕ К4–00

Дано: Точка М движется относительно пластины. Уравнение относительного движения т. М: $s = AM = 50(3t - t^2) - 64$ (см). Уравнение движения тела $\varphi = 4(t^2 - t)$ (рад). t=1 c; b=12 см.

Найти: Для заданного момента времени определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение т.М.



РЕШЕНИЕ:

Рассматриваем движение т.М как сложное, считая ее движение по прямолинейному желобу относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки найдутся по формулам:

$$\vec{v} = \vec{v}_{ОТ\,Н} + \vec{v}_{пер},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{ОТ\,Н} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$$ или в развернутом виде

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau}_{ОТ\,Н} + \vec{a}^{n}_{ОТ\,Н} + \vec{a}^{\tau}_{пер} + \vec{a}^{n}_{пер} + \vec{a}_{кор}.$$

Положение т.М: При t=1с $s = AM = 50(3-1) - 64 = 32$ (см) – т.М находится в области положительных значений на отрезке AD. Расстояние от оси вращения О до т.М равно $R = \sqrt{(4b)^2 + s^2} = \sqrt{48^2 + 32^2}$ =57,7 (см). Тригонометрические функции угла АОМ (α) равны: $\sin\alpha = \dfrac{s}{R} = \dfrac{32}{57{,}7} = 0{,}555$, $\cos\alpha = \dfrac{4b}{R} = \dfrac{48}{57{,}7} = 0{,}832$.

Относительное движение.

Относительная скорость $\vec{v}_{ОТ\,Н} = \dfrac{ds}{dt} = 50(3 - 2t)$. При t=1с вектор $\vec{v}_{ОТ\,Н} = 50(3-2) = 50$ (см/с) - направлен в сторону положительных значений s.

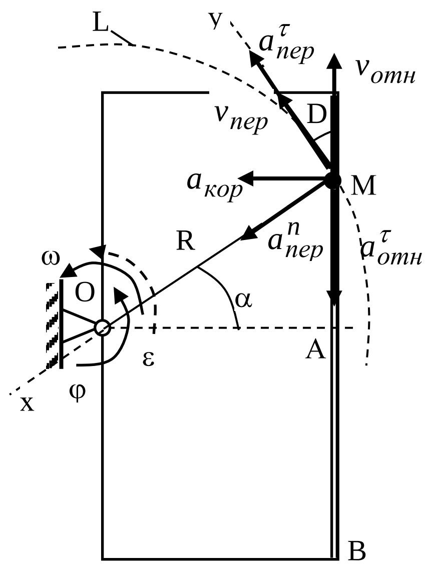
Модуль относительной скорости $v_{ОТ\,Н} = \left|\vec{v}_{ОТ\,Н}\right|$=50 см/с.

Модуль относительного касательного ускорения $a^{\tau}_{ОТ\,Н} = \left|\vec{a}^{\tau}_{ОТ\,Н}\right|$, где $\vec{a}^{\tau}_{ОТ\,Н} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -100$ (см/с²).

$$a^{\tau}_{ОТ\,Н} = 100 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

вектор $\vec{a}^{\tau}_{ОТ\,Н}$ направлен в сторону отрицательных значений s. Знаки $\vec{v}_{ОТ\,Н}$ и $\vec{a}^{\tau}_{ОТ\,Н}$ разные; следовательно, относительное движение т.М замедленное.

Относительное нормальное ускорение $\vec{a}^{n}_{ОТ\,Н} = \dfrac{v^2_{ОТ\,Н}}{\rho} = 0$, так как траектория относительного движения – прямая линия ($\rho = \infty$).



Переносное движение.

Модуль переносной скорости $v_{пер} = R \cdot \omega$, где R=OM - радиус окружности L, описываемой той точкой тела, с которой совпадает в данный момент т.М

ω – модуль угловой скорости тела: $\omega = |\vec{\omega}| = \dfrac{d\varphi}{dt} = 4(2t - 1)$.

При $t_1 = 1$ с $\vec{\omega} = 4$ 1/c; $\omega = 4$ рад/с.

Модуль переносной скорости: $v_{пер} = R \cdot \omega = 57{,}7 \cdot 4 = 230{,}8$ (см/с). Вектор $\vec{v}_{пер}$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела.

Модуль переносного вращательного ускорения $a^{\tau}_{пер} = R \cdot \varepsilon$, где

$\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$ - модуль углового ускорения тела: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = 8\,(1/c^2)$; то есть переносное вращательное движение –ускоренное, так как знаки $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ одинаковые. $\varepsilon = 8$ 1/с² и

$$a^{\tau}_{пер} = 57{,}7 \cdot 8 = 461{,}5 \ (\text{см/с}^2).$$

Вектор $\vec{a}^{\tau}_{пер}$ направлен противоположно $\vec{v}_{пер}$.

Модуль переносного центростремительного ускорения $a^{п}_{пер} = R \cdot \omega^2 = 57{,}7 \cdot 4^2 = 923{,}2$ (см/с²).

Вектор $\vec{a}^{п}_{пер}$ направлен от т .М к т. О.

Кориолисово ускорение $\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{от\ н}$.

Модуль кориолисова ускорения $a_{кор} = 2\omega \cdot v_{от\ н} \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{от\ н})$, где $\sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{от\ н}) = \sin 90^\circ = 1$. Так как $\omega = 4$ рад/с, а $v_{от\ н} =$ 50 см/с то $a_{кор} = 2 \cdot 4 \cdot 50 = 400$ (см/с²).

Вектор $\vec{a}_{кор}$ направлен в соответствии с правилом векторного произведения.

Абсолютная скорость.

Абсолютную скорость т.М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей. Векторы $\vec{v}_{от\ н}$ и $\vec{v}_{пер}$ расположены под углом α° (см. рисунок) друг к другу.

Модуль абсолютной скорости определим как $v = \sqrt{v^2_{от\ н} + v^2_{пер} + 2 v_{от\ н} v_{пер} \cos\alpha}$ и

$v = \sqrt{50^2 + 230{,}8^2 + 2 \cdot 50 \cdot 230{,}8 \cdot 0{,}832} = 273{,}8$ (см/с).

Абсолютное ускорение.

Все векторы лежат в плоскости чертежа. Модуль абсолютного ускорения находим методом проекций:

$$a_x = a^{п}_{пер} + a_{кор} \cos\alpha + a^{\tau}_{от\ н} \sin\alpha = 923{,}2 + 400 \cdot 0{,}832 + 100 \cdot 0{,}555 = 1311{,}5 \ (\text{см/с}^2),$$

$$a_y = a^{\tau}_{пер} - a^{\tau}_{от\ н} \cos\alpha + a_{кор} \sin\alpha = 461{,}5 - 100 \cdot 0{,}832 + 400 \cdot 0{,}555 = 600{,}3 \ (\text{см/с}^2),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1311{,}5^2 + 600{,}3^2} = 1442{,}4 \ (\text{см/с}^2).$$