1. Точка движется по окружности радиусом 30 *см* с постоянным угловым ускорением. Определить тангенциальное ускорение точки, если известно, что за время 4 *с* она совершила 3 оборота, и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение равно 2,7 *м/с*².

Дано:

$R = 30\ см = 0{,}3\ м$

$\varepsilon = const$

$t = 4\ с$

$N = 3\ оборота$

$a_n = 2{,}7\ \ м/с^2$

$a_\tau = ?$

Решение

Поскольку точка совершает вращательное движение с постоянным угловым ускорением, то ее касательное и нормальное ускорения определяются из соотношений:

$$a_\tau = \varepsilon R, \tag{1}$$

$$a_n = \omega^2 R, \tag{2}$$

где ω – угловая скорость точки, ε – угловое ускорение точки,

Для равноускоренного вращательного движения справедливы кинематические соотношения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{3}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{4}$$

где ω_0 – угловая скорость точки в момент времени $t = 0$, φ – угол поворота точки.

С другой стороны угол поворота φ колеса можно выразить через число оборотов N:

$$\varphi = 2\pi N. \tag{5}$$

Подставим (3) и (5) в равенство (4):

$$2\pi N = (\omega - \varepsilon t)t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

и выразим величину ε:

$$\varepsilon = \frac{2(\omega t - 2\pi N)}{t^2}. \tag{6}$$

Выразим из (2) величину ω и подставим в равенство (6):

$$\omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}}. \tag{7}$$

Теперь подставим (6) в выражение (1), с учетом (7), получим

$$a_\tau = \frac{2R\left(\sqrt{\frac{a_n}{R}}t - 2\pi N\right)}{t^2}. \tag{8}$$

После подстановки числовых значений в формулу (8) находим

$$a_\tau = \frac{2\cdot 0,3\cdot\left(\sqrt{\frac{2,7}{0,3}}\cdot 4 - 2\cdot 3,14\cdot 3\right)}{4^2} = -0,257\ \text{м}/c^2.$$

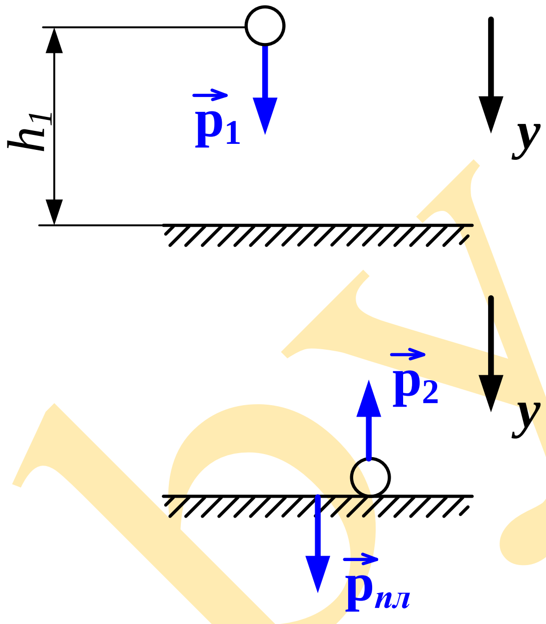
Знак «–» указывает на то, что вращение происходит с постоянным отрицательным угловым ускорением $(\varepsilon < 0)$, т.е. равнозамедленно.

Проверим размерность правой части равенства (8):

$$[a_\tau] = \frac{1\,\text{м}\cdot\left\{\left[\frac{1\ \text{м}/c^2}{1\,\text{м}}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot 1\,c\right\}}{1\,c^2} = 1\ \text{м}/c^2.$$

Ответ: $a_\tau = -0,257\ \text{м}/c^2$.

2. Стальной шарик массой 10 г упал с высоты 1 м на стальную плиту и подскочил после удара на 0,8 м. Определить импульс, полученный плитой.

Дано:	**Решение**
$m = 10\ г = 0,01\ кг$ $h_1 = 1\ м$ $h_2 = 0,8\ м$	
$p_{пл} = ?$	Рис. 1

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса: импульс $\vec{p}_1$, которым обладал шарик до удара, равен сумме импульсов шарика после удара $\vec{p}_2$ и импульсу, полученному плитой $\vec{p}_{пл}$:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_{пл}$$

В проекции на ось y имеем:

$$p_1 = -p_2 + p_{пл},$$

откуда

$$p_{пл} = p_1 + p_2. \qquad (1)$$

Импульсы шарика до и после удара о плиту соответственно равны

$$p_1 = m\upsilon_1, \qquad (2)$$

$$p_2 = m\upsilon_2, \qquad (3)$$

где υ_1 – скорость шарика непосредственно до удара о плиту, υ_2 – скорость шарика непосредственно после удара.

По закону сохранения энергии шарик в начальный момент времени обладал потенциальной энергией mgh_1, которая перешла в кинетическую энергию $\frac{m\upsilon_1^2}{2}$:

$$mgh_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2}, \tag{4}$$

где $g = 9,81\ м/с^2$ – ускорение свободного падения.

Аналогично по закону сохранения энергии когда шарик отскакивал от пола, он обладал кинетической энергией $\frac{m\upsilon_2^2}{2}$, которая перешла в потенциальную mgh_2:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = mgh_2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) выразим υ_1 и υ_2:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}, \tag{6}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh_2}. \tag{7}$$

Подставим (6) и (7) в равенство (1), с учетом (2) и (3), получим:

$$p_{пл} = m(\upsilon_1 + \upsilon_2) = \sqrt{2g}\,m\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right). \tag{8}$$

Тогда импульс, полученный плитой, равен

$$p_{пл} = \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,01 \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{0,8}\right) = 0,084\ кг \cdot м/с.$$

Проверка размерности:

$$[p_{пл}] = \left[1\ \frac{м}{с^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot 1\ кг \cdot [1\ м]^{\frac{1}{2}} = 1\ кг \cdot м/с.$$

Ответ: $p_{пл} = 0,084\ кг \cdot м/с$.

3. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жесткостями 400 *Н/м* и 250 *Н/м*, если первая пружина при этом растянулась на 2 *см*.

Дано:

$k_1 = 400 \ \ H/м$

$k_2 = 250 \ \ H/м$

$\Delta x_1 = 2 \ см = 0,02 \ м$

$A = ?$

Решение

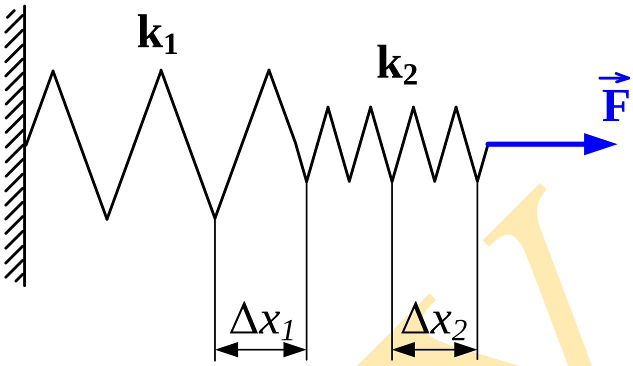


Рис. 2

Работа силы по деформации пружины определяется формулой

$$A = \frac{k \cdot \Delta x^2}{2}, \tag{1}$$

где k – общая жесткость обеих пружин, Δx – суммарное удлинение обеих пружин.

По определению сила упругости равна

$$F_{упр} = k \cdot \Delta x, \tag{2}$$

где Δx – абсолютное удлинение пружины.

Согласно третьему закону Ньютона, сила F, действующая на первую пружину, равна

$$F = F_{упр} = k_1 \cdot \Delta x_1. \tag{3}$$

На вторую пружину действует та же самая сила F, поэтому

$$F = F_{упр} = k_2 \cdot \Delta x_2. \tag{4}$$

Из выражений (3) и (4) выразим

$$\Delta x_2 = \frac{k_1}{k_2} \cdot \Delta x_1. \tag{5}$$

Суммарное удлинение обеих пружин складывается из удлинений каждой из пружин:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2. \tag{6}$$

Подставим (2) – (4) в равенство (6), получим

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2},$$

Откуда

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{7}$$

Подставим (6) и (7) в равенство (1), тогда, с учетом (5), находим

$$A = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{\left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)^2}{2} = \frac{k_1\left(k_1 + k_2\right)}{k_2} \cdot \frac{\Delta x_1^2}{2}. \tag{8}$$

После подстановки числовых значений в формулу (8) получим

$$A = \frac{400 \cdot \left(400 + 250\right)}{250} \cdot \frac{0{,}02^2}{2} = 0{,}208\ \text{Дж} = 208\ \text{мДж}.$$

Проверим размерность правой части равенства (8)

$$\left[A\right] = \frac{1\ \frac{Н}{м} \cdot 1\ \frac{Н}{м}}{1\ \frac{Н}{м}} \cdot 1\ м^2 = 1\ Н \cdot 1\ м = 1\ Дж.$$

Ответ: $A = 208\ \text{мДж}.$

4. Волны в упругой среде распространяются со скоростью 15 м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии 3 м от источника колебаний через 4 с после начала колебаний? Период колебаний 1 с, амплитуда колебаний 2 см.

Дано:

$v = 15\,\text{м/с};$

$l = 3\,\text{м};$

$t = 4\,\text{с};$

$T = 1\,\text{с};$

$A = 2\,\text{см} = 0{,}02\,\text{м}$

$\xi - ?$

Решение

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x, имеет общий вид

$$\xi = A\sin(\omega t - kx), \qquad (1)$$

где A – амплитуда волны;

ω – циклическая частота; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$;

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{vT} = \dfrac{\omega}{v}$ – волновое число (здесь λ – длина волны; v – фазовая скорость распространения волны).

Таким образом, уравнение волны примет вид

$$\xi = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{vT}x\right) = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right].$$

Принимая $x = l$, находим искомое смещение точки

$$\xi = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{v}\right)\right];$$

$$\xi = 0{,}02\cdot\sin\left[\frac{2\cdot 3{,}14}{1}\cdot\left(4 - \frac{3}{15}\right)\right] = -0{,}019\,\text{м} = -1{,}9\,\text{см}.$$

Ответ: $\xi = -1{,}9\,\text{см}.$

5. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при температуре 296 *К* равна 480 *м/с*. Сколько молекул содержится в 10 *г* этого газа?

Дано:	**Решение**
$T = 296\ К$ $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 480\ м/с$ $m = 10\ г = 0{,}01\ кг$ $N = ?$	Средняя квадратичная скорость молекул газа определяется по формуле: $$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \qquad (1)$$

где $R = 8{,}31\ Дж/моль \cdot K$ – молярная газовая постоянная, T – термодинамическая температура газа, μ – молярная масса газа.

Число всех молекул газа определим из соотношения:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \qquad (2)$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}$ – постоянная Авогадро.

Выразим из (1) величину μ и подставим в (2), получим

$$N = \frac{m \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 N_A}{3RT}. \qquad (3)$$

После подстановки всех заданных величин в формулу (3), находим

$$N = \frac{0{,}01 \cdot 480^2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 8{,}31 \cdot 296} = 1{,}88 \cdot 10^{23}\ молекул.$$

Проверим размерности найденных величин:

$$[N] = \frac{1\ кг \cdot \left(1\ \frac{м}{с}\right)^2 \cdot 1\ \frac{1}{моль}}{1\ \frac{Дж}{моль \cdot K} \cdot 1\ K} = \frac{1\ кг \cdot 1\ \frac{м^2}{с^2}}{1\ Дж} = \frac{1\ Дж}{1\ Дж} = безразмерная\ величина.$$

Ответ: $N = 1{,}88 \cdot 10^{23}$ *молекул.*

6. В теплоизолированный цилиндр объемом 10 л, содержащий азот при температуре 27°C и давлении 0,01 МПа, внесен медный шар массой 100 г, нагретый до 727°C. Какая температура установится в цилиндре в результате теплообмена? Теплоемкостью цилиндра пренебречь.

Дано:

$V = 10\,\text{л} = 0{,}01\,\text{м}^3;$

$t_1 = 27°\,\text{C};$

$p = 0{,}01\,\text{МПа} = 1 \cdot 10^4\,\text{Па};$

$m_2 = 100\,\text{г} = 0{,}1\,\text{кг};$

$t_2 = 727°\,\text{C};$

Газ – азот N_2

$t - ?$

Решение

Предварительно заметим, что объем медного шара по сравнению с объемом сосуда пренебрежимо мал, поэтому считаем, что процесс теплообмена в цилиндре происходит при постоянном объеме.

Количество тепла, получаемое азотом от медного шара, определяется по формуле

$$Q_1 = \frac{m_1}{M} C_V \left(T - T_1\right), \qquad (1)$$

где m_1 – масса азота;

$M = 28 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}$ – молярная масса азота;

C_V – молярная теплоемкость азота при постоянном объеме;

T – температура, установившаяся в цилиндре в процессе теплообмена;

T_1 – начальная абсолютная температура азота;

$$T_1 = t_1 + 273 = 27 + 273 = 300\,\text{К}.$$

Молярная теплоемкость азота при постоянном объеме находится по формуле

$$C_V = \frac{iR}{2}, \qquad (2)$$

где i – число степеней свободы молекул газа; для азота N_2 как двухатомного газа $C_V = \frac{iR}{2}$;

$R = 8{,}31\,\text{Дж/(моль·К)}$ – универсальная газовая постоянная.

Далее воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона для начального состояния азота

$$pV = \frac{m_1}{M} RT_1,$$

Откуда имеем

$$\frac{m_1}{M} = \frac{pV}{RT_1}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), будем иметь

$$Q_1 = \frac{pV}{RT_1} \cdot \frac{iR}{2} \cdot (T - T_1)$$

или

$$Q_1 = \frac{i}{2} \frac{pV}{T_1} (T - T_1). \quad (4)$$

Количество теплоты, переданное медным шаром газу, определяется по формуле

$$Q_2 = cm_2 (T_2 - T), \quad (5)$$

где $c = 385\,\text{Дж/(кг·К)}$ – удельная теплоемкость меди;

$T_2 = t_2 + 273 = 727 + 273 = 1000\,\text{К}$ – начальная абсолютная температура меди.

В соответствии с законом сохранения энергии имеем $Q_1 = Q_2$ или с учетом выражений (4) и (5)

$$\frac{i}{2}\frac{pV}{T_1}\left(T-T_1\right)=cm_2\left(T_2-T\right),$$

откуда находим искомую температуру, установившуюся в цилиндре,

$$T=\frac{2cm_2T_2+ipV}{2cm_2T_1+ipV}\cdot T_1.$$

Выполняем вычисления

$$T=\frac{2\cdot 385\cdot 0{,}1\cdot 1000+5\cdot 1\cdot 10^4\cdot 0{,}01}{2\cdot 385\cdot 0{,}1\cdot 300+5\cdot 1\cdot 10^4\cdot 0{,}01}\cdot 300=985\,\text{К};$$

$$t=T-273=985-273=712^\circ\,\text{C}.$$

Ответ: $t=712^\circ\,\text{C}$.

7. Определить КПД цикла, имеющего на диаграмме T, S вид, изображенный на рис. 3. $(t_1 = 550\ ^\circ C;\ \ t_2 = 300\ ^\circ C)$**.**

Дано:	**Решение**
$T_1 = 823\ K$	
$T_2 = 573\ K$	
$\eta = ?$	

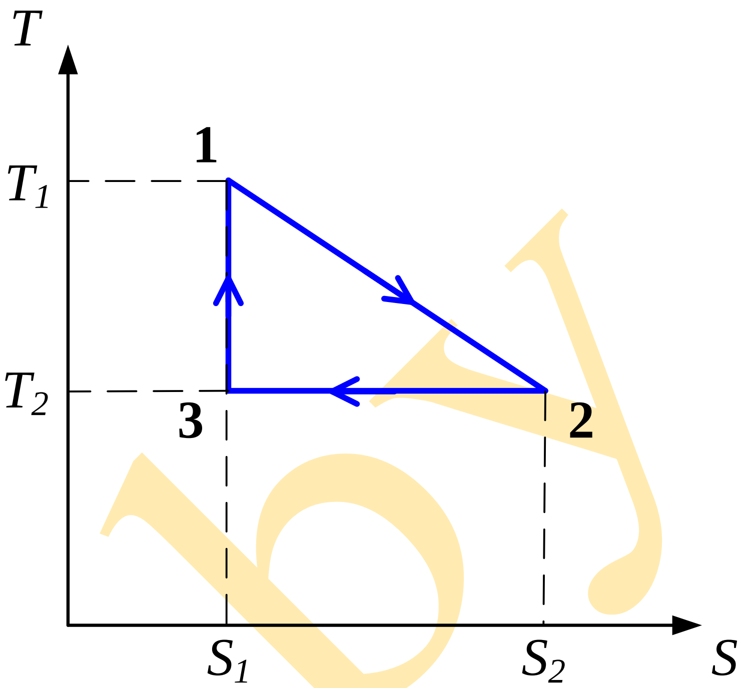


Рис. 3

КПД цикла определяется по формуле

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (1)$$

где Q_1 – количество теплоты, подводимое к системе, Q_2 – количество теплоты, отдаваемое системой.

Воспользуемся свойством T, S диаграммы: площадь под линией процесса соответствует количеству теплоты отданной или полученной системой.

Процесс перехода из точки 1 в точку 2 характеризуется тем, что $dS > 0$, т.е. к системе подводится количество теплоты

$$Q_1 = \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot (S_2 - S_1). \qquad (2)$$

Из рис. 3 видно, что процесс перехода из точки 2 в точку 3 является изотермическим $(T = const)$, причем $dS < 0$, т.е. система отдаёт количество теплоты

$$Q_2 = T_2 \cdot (S_2 - S_1). \tag{3}$$

Процесс перехода из точки 3 в точку 1 является адиабатным, так как не происходит изменения энтропии $dS = 0$, следовательно, $dQ = 0$ или $Q = const$.

Подставим равенства (2) и (3) в формулу (1):

$$\eta = \frac{\frac{T_1 + T_2}{2} \cdot (S_2 - S_1) - T_2 \cdot (S_2 - S_1)}{\frac{T_1 + T_2}{2} \cdot (S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}. \tag{4}$$

После подстановки числовых значений в формулу (4) получим

$$\eta = \frac{823 - 573}{823 + 573} = 0{,}179.$$

Выполним проверку размерности:

$$[\eta] = \frac{1\,K}{1\,K} = \textit{безразмерная величина.}$$

Ответ: $\eta = 0{,}179$ или $\eta = 17{,}9\%$.

8. Какая энергия выделится при слиянии двух капель ртути диаметром 0,8 *мм* и 1,2 *мм* в одну каплю? Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен 0,5 *Н/м*.

Дано:	**Решение**
$d_1 = 0,8\ мм = 8 \cdot 10^{-4}\ м$ $d_2 = 1,2\ мм = 12 \cdot 10^{-4}\ м$ $\alpha = 0,5\ Н/м$	По закону сохранения энергии суммарная энергия обеих капель (E_1 и E_2) будет равна энергии вновь образованной капли E_3 плюс выделившаяся при слиянии энергия E:
$E = ?$	$$E_1 + E_2 = E_3 + E. \qquad (1)$$

Величины E_1, E_2 и E_3 определяются их поверхностными натяжениями:

$$E_1 = \alpha S_1 = \alpha \pi d_1^2, \qquad (2)$$

$$E_2 = \alpha S_2 = \alpha \pi d_2^2, \qquad (3)$$

$$E_3 = \alpha S_3 = \alpha \pi D^2, \qquad (4)$$

где D – диаметр вновь образованной капли.

Подставляя (2) – (4) в (1), получим

$$E = \alpha \pi \left(d_1^2 + d_2^2 + D^2 \right). \qquad (5)$$

Объем образованной капли складывается из объемов капель до слияния, т.е.

$$V_3 = V_1 + V_2. \qquad (6)$$

Объемы капель, имеющих шаровидную форму, выражаются через их диаметры соотношениями:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^3 = \frac{\pi d_1^3}{6}, \qquad (7)$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^3 = \frac{\pi d_2^3}{6}, \qquad (8)$$

$$V_3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3=\frac{\pi D^3}{6}. \tag{9}$$

Подставляя (7) – (9) в (6), выразим D:

$$D=\sqrt[3]{d_1^3+d_2^3}. \tag{10}$$

Теперь подставим (10) в (5), имеем

$$E=\alpha\pi\left(d_1^2+d_2^2+\sqrt[3]{\left(d_1^3+d_2^3\right)^2}\right). \tag{11}$$

После подстановки числовых значений в формулу (11) получим

$$E=0,5\cdot 3,14\cdot\left(\left(8\cdot 10^{-4}\right)^2+\left(12\cdot 10^{-4}\right)^2+\sqrt[3]{\left(\left(8\cdot 10^{-4}\right)^3+\left(12\cdot 10^{-4}\right)^3\right)^2}\right)=$$

$$=5,96\cdot 10^{-6}\ \text{Дж}=5,96\ \text{мкДж}.$$

Выполним проверку размерности:

$$\left[E\right]=1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}\cdot 1\ \text{м}^2=1\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м}=1\ \text{Дж}.$$

Ответ: $E=5,96$ *мкДж*.